Bartolo Luque

sense*f*ronteres

El món per un forat

1. EL MISTERIÓS FENOMEN DE L'ESPIRAL D'ULAM

Stanislaw M. Ulam (1909-1986) conta en la seua autobiografia, *Adventures of a mathematician* (publicada en castellà amb el títol *Aventuras de un matemático*), que va patir una greu encefalitis vírica que de poc posa fi a la seua vida. Quan es va despertar d'un coma postoperatori que durà dies, el cirurgià, que volia comprovar les seues facultats mentals, li va preguntar quant sumaven 8 i 13: «*Que me preguntase una cosa así me ofendió tanto, que simplemente sacudí la cabeza. Entonces me preguntó cuál era la raíz cuadrada de 20, y repliqué: aproximadamente 4,4. Como permanecía en silencio, le pregunté: ¿No es así? Recuerdo que el Doctor Rainey rió con evidente alivio y dijo: ¡No lo sé!*».

Quan s'acosta l'hora de pagar en un sopar de molts comensals en què se sap que n'hi ha un que és matemàtic, sempre se sent la frase: «Que calcule el matemàtic a com eixim cada un». La major part de la gent pensa que els matemàtics senzillament «fan números» i que, per tant, han de tenir una extraordinària capacitat per a «calcular». Això, en la majoria dels casos, no és cert: els matemàtics calculen tan malament com la resta dels humans. A què es dediquen, llavors? Molts us dirien que busquen patrons, relacions i analogies que encara s'han descobert, que busquen bellesa. Els millors, com deia Banach, «veuen analogies entre analogies», busquen relacions entre relacions, bellesa pura.

Buscadors de patrons

Estem preparats per l'evolució per a detectar patrons, ordre en el món. Els humans tenim una disposició evolutiva a sostraure ordre del desordre, som buscadors de patrons. Els millors buscadors són un grup conegut per *matemàtics*. I, com no podia ser d'una altra manera, en els nombres en troben un bon grapat.

Els nombres primers són els que només són divisibles per ells mateixos i l'1. Els nombres primers són: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41... (per raons tècniques que no fan al cas, el nombre 1 no es considera primer). Com es pot observar en la llista, el sisé nombre primer és el 13. No es coneix cap fórmula senzilla per a determinar els primers. Però, que no es conega aquesta fórmula no vol dir que no n'hi haja. Durant segles, els matemàtics s'han preguntat si els nombres primers es reparteixen a l'atzar o podem determinar *a priori* les seues posicions. L'esforç matemàtic per desvelar la distribució dels nombres primers ha sigut ímprobe. Leonhard Euler (1707-1783), un dels matemàtics més grans de la història, va determinar una fórmula senzilla: $n2 + n + 41$, en què si substituïm n per 0, 1, 2... obtenim una seqüència de 40 nombres primers consecutius fins a arribar al valor $n = 40$ que ens proporciona el nombre compost 1.681. Euler arribà a dir sobre això: «Els matemàtics han intentat debades fins hui descobrir un ordre en la seqüència dels nombres primers, i tenim raons per a creure que això és un misteri que no podrà mai penetrar la ment humana». Molts dels intents, com veurem ara en un famós exemple, s'han encaminat a visualitzar aquesta distribució.

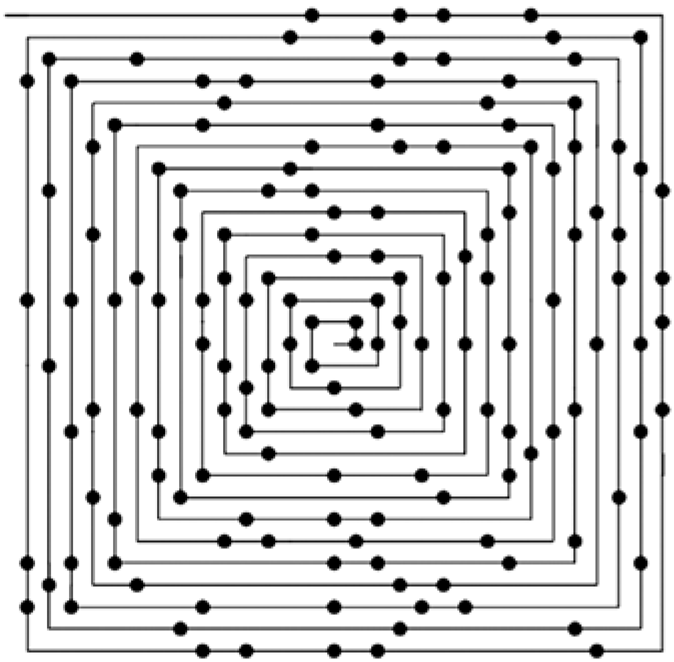
L'espiral d'Ulam

L'any 1963, Ulam, avorrit durant una xarrada científica en un congrés, començà a gargotejar sobre un full quadriculat. Se li va acudir, començant pel nombre 1, disposar els nombres naturals en forma d'espiral de la manera següent:

17	16	15	14	**13**
18	**5**	4	**3**	12
19	6	1	**2**	**11**
20	**7**	8	9	10
21	22...			

i distingir els primers dels altres nombres (en el nostre exemple, els nombres primers estan subratllats i en negreta). Sorprenentment, semblava que els primers es disposaven amb molta més freqüència que es podia esperar al llarg de diagonals. Amb les paraules d'Ulam: «Exhibien una forta aparença no aleatòria». Potser havia trobat un patró en el caos de la distribució de nombres primers...

Curiosament, set anys abans, l'escriptor de ciència-ficció Arthur C. Clarke havia descrit una espiral de nombres primers semblant en la seua novel·la *The City and the Stars* ('La ciutat i les estrelles', 1956), en què el personatge anomenat Jeserac, ajudat pel seu ordinador, buscava patrons en la distribució de nombres primers. Clarke no arribà a realitzar mai aquest experiment realment; això no obstant, quan Ulam tornà del congrés al seu lloc de treball a Los Alamos, va ser la primera cosa que va fer. Amb l'ajuda de Myron L. Stein i Mark B. Wells programà per a aquesta tasca l'ordinador mastodòntic *Maniac II*, que disposava en la seua memòria dels primers 90 milions de nombres primers. Parlem d'una època en què no hi havia ni tan sols pantalles d'ordinador. Per a entreveure el patró van usar un oscil·loscopi a manera de pantalla primitiva i en fotografiaren el resultat. En l'espiral que van construir per a tots els primers per davall dels 10 milions, els primers mostraven tendència a aparéixer en les diagonals i també en línies horitzontals i verticals, com podem veure en el següent exemple de petita espiral en què solament hem assenyalat la posició dels nombres primers:

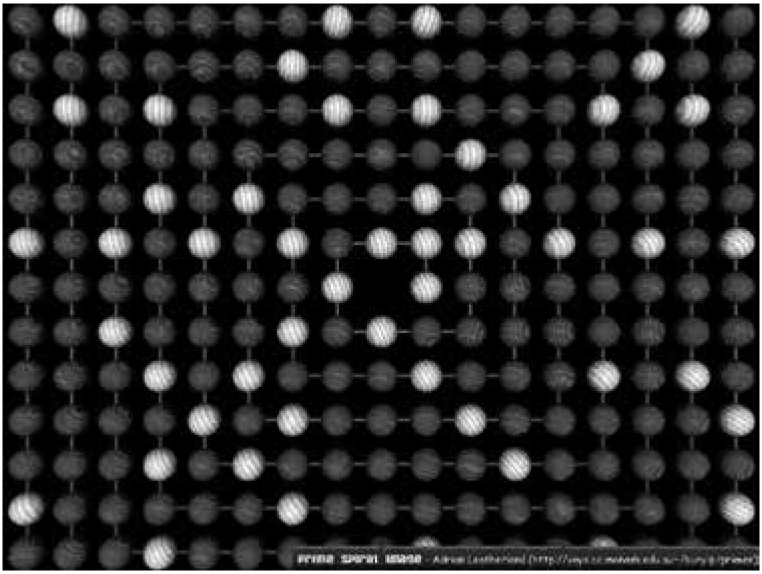


De fet, aquestes línies amagaven fórmules per a nombres primers. Els alineaments corresponen a fórmules, com ara la d'Euler, del tipus $an2 + bn + c$, on a, b i c són enters. Per exemple, tenim una diagonal, baix a l'esquerra del dibuix, amb els primers 5, 19, 41, 71 i 109. Aquesta línia correspon a l'expressió $4n2 + 10n + 5$. Si donem a n valors de 0 a 4 generem aquests cinc nombres primers consecutius en la diagonal. D'una manera semblant, la seqüència de primers 7, 23, 47 i 79, en diagonal baix a la dreta, ajusta a $4n2 + 4n – 1$ i dóna valors a n d'1 a 4. Si en compte de començar l'espiral amb el nombre 1 al centre comencem amb altres nombres, com van fer en els seus experiments Ulam i els seus col·laboradors, se n'obtenen línies i expressions quadràtiques de primers addicionals. Per exemple, començant pel 41 al centre obtenim precisament l'expressió d'Euler.

Ulam va constatar que, per a valors de n per davall dels 10 primers milions de primers, la fórmula d'Euler proporcionava nombres primers un 47,5% de les vegades. Evidentment, no totes les expressions quadràtiques proporcionen una gran quantitat de primers. Per exemple, l'expressió $2n2 + 4n + 117$ només en proporciona un 5% de les vegades. Els teòrics han demostrat que no hi ha cap fórmula senzilla que siga capaç de generar solament nombres primers. No obstant això, el motiu pel qual algunes d'aquestes funcions quadràtiques presenten tal riquesa de nombres primers no s'ha desvelat encara.

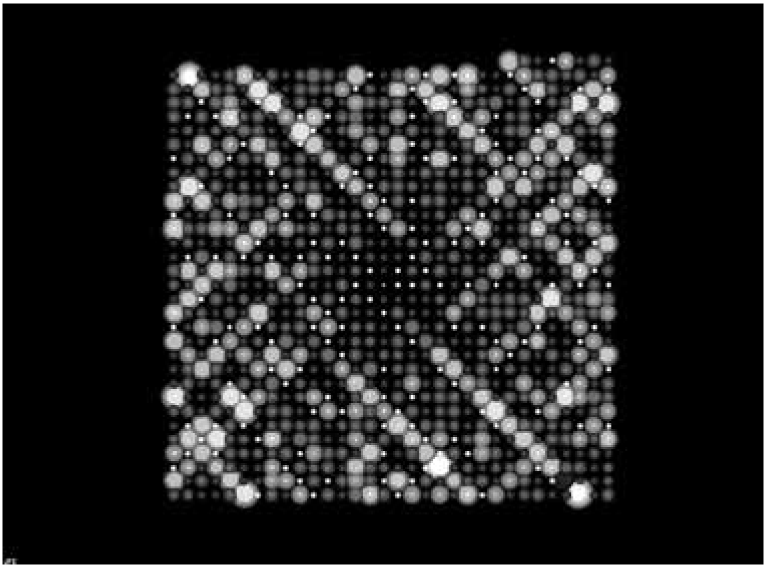
Art i bellesa espiral

Ara el lector està preparat per a comprendre el sentit de les dues creacions digitals, infografies, amb què il·lustrem aquest assaig. La primera, deguda a Adrian J. F. Leatherland, es titula *Àbac de fusta*. Sens dubte, Leatherland encerta quan fa servir boles de fusta sobre una espiral de vareta metàl·lica a fi d'insinuar un àbac, la calculadora més antiga. Tant de bo que algun artista plàstic s'animara a fer-ne un model real.



Àbac de fusta, Adrian J. F. Leatherland (*yoyo.cc.monash.edu.au/~bunyip/primes*)

La segona creació, de Jean-François Colonna, es titula *L'espiral d'Ulam generalitzada mostrant 1.024 nombres naturals*. Colonna opta per incloure més informació en l'espiral: el radi de l'esfera amb nombre N és proporcional a l'arrel quadrada del nombre de divisors de N (sense comptar el mateix N). De manera que els nombres primers tenen radi 1 i tots hi estan representats per petites esferes de color blanc. Els altres nombres hi apareixen en colors que varien la seua lluminositat, també en funció del nombre de divisors.



L'espiral d'Ulam generalitzada mostrant 1.024 nombres naturals, Jean-François Colonna (*www.lactamme.polytechnique.fr*)

L'espiral d'Ulam va obrir tota una sèrie de noves preguntes: hi ha línies que contenen una infinitat de nombres primers?, quina és la densitat màxima en una línia?, és la densitat de primers la mateixa en qualsevol dels quatre quadrants?, què succeeix amb altres formes d'empaquetar els nombres com ara espirals en graelles hexagonals?, i empaquetatges tridimensionals i n-dimensionals?

L'espiral d'Ulam ens ofereix l'evidència visual que hi ha algun ordre ocult en la distribució dels nombres primers. Tan sols un any després del descobriment o creació de l'espiral d'Ulam (què opina el lector que és?), al març de 1964, va ser coberta de la famosa revista *Scientific American*. L'espiral és un magnífic exemple de la manera amb què un experiment gràfic pot desvelar patrons ocults i produir resultats matemàtics inesperats. I, com apunta Ivars Peterson en el seu llibre *Mathematical Trek,* també ens mostra que «és veritat que no sols hi ha misteri, sinó també bellesa en la distribució dels nombres primers».

Bosc dels elements, quadre de Tobia Ravà. Aquest pintor italià és hereu de l'antiga escola pitagòrica, filtrada a través de la tradició hebrea de la gematria, en què «tot és nombre». La seua obra plasma aquest pensament en imatges. Podeu gaudir de totes les il·lustracions d'aquest assaig i moltes més en el seu web: *www.tobiarava.com.*